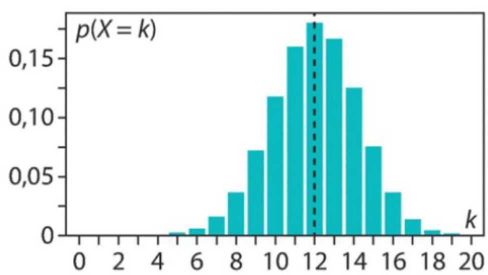
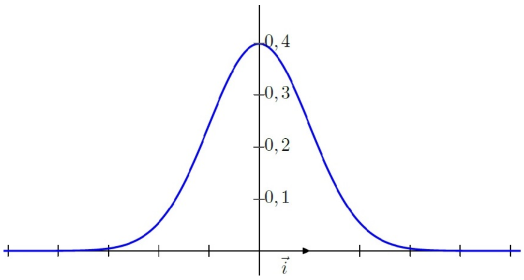
Loi normale

1. Définition

Définition 9.1 Soit n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0;1]$. Lorsque n devient "grand" et si $np > 5$ le diagramme en bâton représentant la loi binomiale X_n de paramètres n et p se "rapproche" d'une courbe ayant la forme d'une "cloche", appelée Courbe de Gauss. On dit alors que la variable aléatoire suit une loi normale d'espérance $\mu = np$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que la loi normale est **centrée réduite**.

Courbe de la loi normale :





A gauche la loi binomiale, à droite la loi normale ; la représentation graphique de la loi normale a l'allure d'une cloche (ci-dessus pour $\mu = 0$ et $\sigma = 1$) qu'on appelle *Courbe de Gauss*. Cette courbe admet un axe de symétrie, ce qui va nous permettre de calculer plus facilement certaines probabilités.

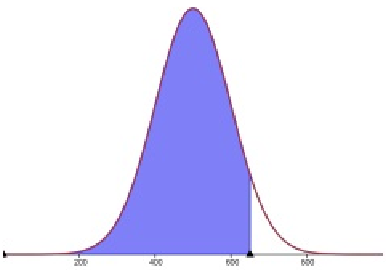
Théorème 9.1 - Le théorème de Moivre-Laplace dit qu'une *loi binomiale* $\mathscr{B}(n;p)$ peut être approximée par une *loi normale centrée réduite* $\mathscr{N}(0;1)$ lorsque « n est assez grand ».

En pratique, on considère que l'on peut utiliser cette approximation si l'on a simultanément : $\begin{cases} n \geqslant 30 \\ np \geqslant 5 \\ n(1-p) \geqslant 5 \end{cases}$

2. Propriétés

Propriété 9.1 La courbe de la loi normale est symétrique par rapport à une droite verticale passant par $x = \mu$, où μ est l'espérance de la loi normale.

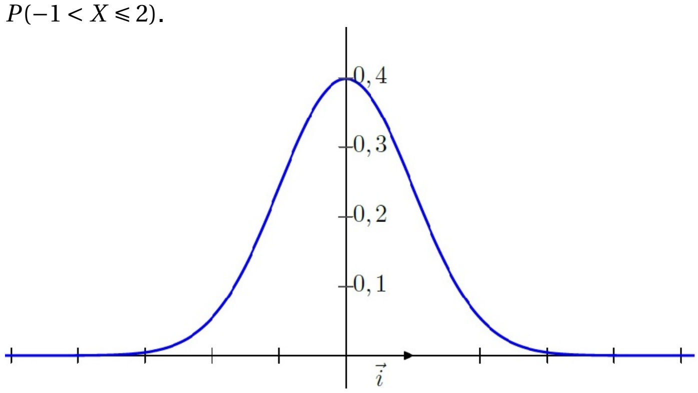
Ci-contre, l'aire correspondant à la probabilité $P(X \leqslant 650)$ pour la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 100$



Propriété 9.2 Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale, pour tous réels a et b on a :

1. $P(X \leqslant b)$ est l'aire de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses, pour $x \leqslant b$
2. $P(X \geqslant b)$ de même pour $x \geqslant b$
3. $P(a \leqslant X \leqslant b)$ de même pour $a \leqslant x \leqslant b$

Exercice 9.1 Soient X une v.a. suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$, et f la courbe de Gauss correspondante.
Sur la courbe représentative de f donnée ci-dessous, hachurer la région dont l'aire correspond à $P(-1 < X \leqslant 2)$.



Propriété 9.3 Comme " $P(X = b)$ " représente "l'aire d'un trait", qui vaut zéro, on a $P(X \leqslant b) = P(X < b)$; les inégalités strictes (comme <) peuvent être remplacées par des inégalités larges (comme ⩽).

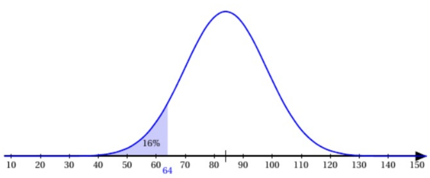
Attention, ceci est vrai pour la loi normale, mais PAS pour la loi binomiale !

Propriété 9.4 Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

- L'aire totale comprise entre la courbe en cloche et l'axe des abscisses est égale à 1 (probabilité de 100%).
- Comme on a un axe de symétrie en μ et que l'aire totale vaut 1,
$$P(X \leqslant \mu) = \frac{1}{2}$$
$$P(X \geqslant \mu) = \frac{1}{2}$$
- De même en n'importe quel point d'abscisse b, le total de l'aire avant b et de l'aire après b doit faire 1, donc :
$$P(X \geqslant b) = 1 - P(X \leqslant b)$$
- Également en regardant les aires :
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$$

Exercice 9.2 Voici la courbe d'une loi normale d'espérance $\mu = 84$.
On sait que $P(X \leqslant 64) = 0,16$. En utilisant la symétrie de la courbe, déterminer $P(X \geqslant 104)$ et $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$

....
....
....
....
....
....



3. A la calculatrice

La loi normale se calcule à la calculatrice, ou à défaut avec des tables de loi normale.

A. Calcul de $P(a < X < b)$ (ou $P(a \leqslant X \leqslant b)$)

Par exemple, si X est une v.a. qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, alors $P(1 < X < 2)$ s'obtient ainsi :

- Sur **TI** : dans le menu **distrib**, sélectionner **NormalFrep**, puis taper a, b, μ, σ,).
- Sur **Casio** : dans le menu **Stat**, choisir **Dist**, puis **Norm** et **ncd**, puis compléter avec les paramètres a, b, μ et σ.
- Sur **Numworks** : dans le menu **Probability**, sélectionner *Normal*, puis entrer μ et σ, sélectionner **next**. Sélectionner le type de courbe correspondant à la probabilité que vous voulez calculer, complétez les valeurs a et b, et appuyez sur "ok".

B. Calcul de $P(X \geqslant a)$, de $P(X \leqslant b)$

- Sur **TI ou Casio** : pour $P(X \geqslant a)$, prendre $b = 10^{10}$, c'est-à-dire quasiment $b = +\infty$.
  Pour $P(X \leqslant b)$ prendre $a = -10^{10}$, c'est-à-dire quasiment $a = -\infty$.
- Sur **Numworks** : choisir la courbe correspondant à la situation.

Exercice 9.3 Pour $X \sim N(0;1)$, calculer :

1. $P(X \leqslant 0,43)$
   ....
   ....
2. $P(X \leqslant 1,38)$
   ....
   ....
3. $P(0,43 \leqslant X \leqslant 1,38)$
   ....
   ....
4. $P(X \leqslant -0,96)$
   ....
   ....

Attention ! Dans les énoncés, quand on vous donne la loi, on vous donne $N(\mu;\sigma^2)$. Donc par exemple pour $N(20;36)$, on a $\mu = 20$ mais $\sigma = 6$.

Exercice 9.4 Pour $X \sim N(20;36)$, calculer :

1. $P(X \leqslant 20)$
   ....
   ....
2. $P(X \geqslant 30)$
   ....
   ....
3. $P(5 \leqslant X \leqslant 30)$
   ....
   ....

C. Exercices d'application

Exercice 9.5 On lance 3600 fois un dé équilibré. On souhaite évaluer la probabilité que le nombre d'apparition du 6 soit compris strictement entre 575 et 650. On note X la v.a. égale au nombre d'apparitions du 6 lors de ces 3600 lancers.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Appliquer, en le justifiant, le théorème de Moivre-Laplace à la variable aléatoire X.
....
....
....
....
....
....
3. En déduire une valeur approchée de la probabilité recherchée.
....
....
....
....

Exercice 9.6 Une usine de composants électroniques fabrique des résistances. En mesurant un grand échantillon de ces composants, on constate que la résistance nominale, exprimée en ohms, de chaque composant tiré au hasard est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(1000;100)$.
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, et justifier.

1. La probabilité que la résistance d'un composant tiré au hasard soit comprise entre 980 Ω et 1020 Ω est supérieure à 0,95.
....
....
....
....
2. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre 991 Ω et 1009 Ω est supérieure à 0,9.
....
....
....
....
3. La probabilité que la résistance d'un composant soit supérieure à 983,6 Ω est supérieure à 0,97.
....
....
....
....
4. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre 990 Ω et 1010 Ω est égale à 0,84.
....
....
....
....
5. La probabilité que la résistance d'un composant soit comprise entre 983,6 Ω et 1019,6 Ω est égale à 0,925.
....
....
....
....

Exercice 9.7 Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre.
On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obéit à une loi normale les paramètres étant : moyenne : 0mm, écart-type : 0,02mm.
On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7,97mm et 8,03mm.
Quelle est la proportion de billes rejetées ?
....
....
....
....
....

Exercice 9.8 Gaspard prend le bus 600 fois par an. Il veut savoir s'il est intéressant de ne jamais acheter de ticket.
Un ticket coûte 1,1€ et une amende 30€.
A chaque voyage, la probabilité d'être contrôlé est de 0,05. On note C la variable aléatoire égale au nombre de contrôle sur une année.

1. Justifier que C suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Justifier que cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale dont vous préciserez les paramètres.
3. A l'aide de l'approximation de la question 2), répondre à la question que se pose Gaspard.

Exercice 9.9 Un avion peut embarquer 300 passagers. Lors de l'embarquement, la probabilité qu'un passager ayant réservé ne se présente pas est de 0,1. On note n le nombre de réservations proposées par la compagnie et X la variable aléatoire indiquant le nombre de passagers ayant réservés et se présentant à l'embarquement.
Les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2. Justifier que cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale dont vous préciserez les paramètres.

....
....
....
....
....
....
....
....

3. Si la compagnie accepte 330 réservations, quelle est la probabilité, à 10^{-1} près, que tous les passagers ne puissent embarquer ?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....